Uke 36: Utsagnslogikk

Oppgave 1

1. er en logisk konsekvens av , men er ikke en logisk konsekvens av .
2. er ekvivalent med . Vi ser at sannhetsverdien ikke er avhengig av bare , men også . Altså er ikke en logisk konsekvens av . I tilfelle hvor både og er sann, vil være sann, men vi kan ikke si med sikkerhet at er sann ut ifra det — må også være sann i så fall. Dermed er heller ikke en logisk konsekvens av .
3. Her er det enklest å lage en sannhetsverditabell:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |

Vi ser at er en logisk konsekvens av , men ikke motsatt.

1. Igjen lager vi en sannhetsverditabell:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |

og er logiske konsekvenser av hverandre.

Oppgave 2

1. Alle påstandene i tilfredsstilles i tilfeller som når
   1. er usann.
   2. er sann.
   3. er usann.
   4. er sann.
2. Vi kan endre på  bare for å gjøre den første påstanden usann. Da får vi:
   1. er sann
   2. er sann
   3. er usann
   4. er sann

I dette tilfelle er ikke sann.

1. Konjunksjonen av alle påstandene i er . Det er mulig for denne å være både sann — for eksempel ved at , , , og er sant. Den kan også være usann ved at , , , og er sant. Altså er dette ikke en tautologi.
2. Disjunksjonen av alle påstandene i er . Denne vil alltid være sann; om vi gjør usann, vil , og dermed disjunksjonen være sann. Vi får det samme problemet om er sann. Altså er dette en tautologi.

Oppgave 3

1. Det finnes forskjellige tilordninger på .
2. Det er forskjellige tilordninger på  som gjør sann.
3. Her kan enten hele venstresiden være sann, mens de atomære formlene på høyresiden er enten sanne eller usanne, eller så kan det være motsatt. Dette gir oss forskjellige tilordninger på som gjør sann.
4. Denne påstanden er kun usann hvis høyresiden er sann, altså at , , og er sanne, men hverken , , eller er det. Altså er det kun ett tilfelle hvor dette ikke er sant, når , , , , , og . Dette gir oss forskjellige tilordninger som gjør påstanden sann.

Oppgave 4

Hvis , finnes det forskjellige tilordninger på . En utsagnslogisk formel som kun bruker de atomære formlene i kan enten være sann eller usann for hver av disse tilordningene. Altså er det forskjellige sannhetsverditabeller som en slik utsagnslogisk formel kan gi ut. har 17 forskjellige utsagnslogiske formler, som betyr at 2 av disse må ha samme sannhetsverditabell, og derfor være logisk ekvivalente.

Uke 37: Predikatlogikk

Oppgave 5

1. Denne påstanden sier at for alle naturlige tall hvor er et partall, er også et partall. Dette stemmer ikke overens med definisjonen på partall — hvis man legger sammen et partall med et oddetall får man et oddetall — og er derfor usant.
2. Her sier påstanden at for alle hvor er et partall, er også et partall. Dette kan vi bevise:

Altså er denne påstanden sann.

1. Denne påstanden sier det finnes ett naturlig tall for alle som gjør at er et partall. Dette er usant. For eksempel hvis er et partall, vil alle oddetallsverdier av ikke oppfylle påstanden.
2. Denne påstanden kan lett forvirres med den forrige, men her sies det altså at for alle verdier kan vi finne en verdi slik at er et partall. Dette er sant — alle naturlige tall har alternativer de kan legges sammen med for å bli et partall. For eksempel, hvis er et oddetall, kan man legge det sammen med et annet oddetall , som gjør til et partall.

Oppgave 6

1. sier at det finnes et naturlig tall for alle naturlige tall hvor er mindre enn eller lik . Dette er sant; det naturlige tall 0 er det minste naturlige tallet, og alle naturlige tall er enten lik eller større enn dette.
2. sier at det finnes et naturlig tall for alle naturlige tall som gjør at er større enn . Dette er usant fordi det impliserer at det finnes en øvre grense i den naturlige tallmengden, som det selvfølgelig ikke gjør. Uansett hvilket naturlig tall du velger, vil det alltid finnes større naturlige tall. Den naturlige tallmengden er uendelig stor.
3. Utsagnet betyr at for alle naturlige tall kan vi finne et naturlig tall som gjør at er mindre enn . Dette er sant av samme grunn som gjør utsagnet i **b)** usant; siden den naturlige tallmengden er uendelig stor, finnes det alltid et større tall vi kan velge som gjør mindre enn .
4. Utsagnet betyr at for alle naturlige tall , finnes det et naturlig tall som gjør at er større enn . Dette gjelder ikke hvis , siden den naturlige tallmengden har en nedre grense her. Altså er dette usant.
   1. går fra å være sant til usant. Uansett hvilket heltall man velger, finnes det alltid et tall som er mindre.
   2. forblir usant. Mengden med hele tall har heller ingen øvre grense.
   3. forblir sant. Siden ikke har en øvre grense, kan vi alltid finne et større tall.
   4. blir nå sant, siden vi ikke har en nedre grense lenger. fortsetter ned i det uendelige, og vi kan derfor alltid finne et mindre tall.

Oppgave 7

1. Vi antar at påstanden «Hvis er et irrasjonelt tall, så er et irrasjonelt tall» er sann. Dette kan også skrives som . For å bevise dette kan vi bruke et kontrapositivt bevis, altså vise at:

Vi vet at et rasjonelt tall kan skrives som en brøk med hele tall i både teller og nevner. Dette betyr at om skal være et rasjonelt tall, må altså være et rasjonelt tall; da er det alltid mulig å omskrive brøken slik at den kun inneholder hele tall. Om hadde vært for eksempel, hadde . Altså er implikasjonen korrekt, som betyr at om er et irrasjonelt tall, så må også være det.

1. Dette kan vi også forsøke å bevise ved hjelp av et kontrapositivt bevist. Om påstanden «summen av to irrasjonale tall er irrasjonelt» er sant, må påstanden «